# DER SCHWANZ IST EINE MONOTON FALLENDE EXPONENTIALFUNKTION

FRANZ LEMMERMEYER

In den letzten Jahren erschien eine regelrechte Flut von Büchern zu Brückenkursen in Mathematik, die, so konnte man lesen, der Auffrischung der Schulmathematik zu Beginn eines Studiums dienen sollen. Tatsächlich scheinen die Autoren solcher Werke dabei von der Annahme geleitet zu sein, dass die Schulmathematik sich in den letzten 30 Jahren nicht wesentlich verändert habe. Dies ist allerdings ein Irrtum – ein Großteil dessen, was in diesen Brückenkursen aufgefrischt werden soll, wird heute gar nicht mehr unterrichtet, jedenfalls nicht in Baden-Württemberg. Auch den Universitätsmathematikern, die sich gerne über die mangelhaften Kenntnisse der Studienanfänger beschweren, scheint kaum bewusst zu sein, was heute vom Mathematikunterricht, den sie selbst vor 40 Jahren genossen haben, noch übrig geblieben ist.

Im folgenden möchte ich beschreiben, wie der Mathematikunterricht von Grundschule bis zum Abitur in Baden-Württemberg aussieht, auf welchem Niveau sich die Schulbücher nach den vielen Reformen der letzten Jahre inzwischen befinden, und vor allem, welches Bild der Mathematik von diesen Büchern in die Köpfe der jungen Generation projiziert wird.

Dass die Zerschlagung des deutschen Bildungswesens nicht beim Abitur aufgehört hat, sondern im Zuge der Bologna-Reform auch an den Universitäten massives Unheil angerichtet hat, soll hier allerdings kein Thema sein: dazu sei auf Liessmann [32] verwiesen.

## 1. Die Grundschule in Baden-Württemberg

Die Eltern, die das Procedere bereits von einem ihrer älteren Kinder her kennen, kann der erste Elternabend in der Grundschule nicht mehr überraschen: sie wissen bereits, dass die Lehrerin ihnen erklären wird, wie wichtig das freie Schreiben für ihr Kind ist, und dass ihr Kind einen großen psychischen Schaden davontragen wird, wenn sie versuchen würden, es frühzeitig mit der Rechtschreibung bekannt zu machen. Damit auch Eltern, die das anders sehen, diesem Verbot Folge leisten, wird das Kind während des Unterrichts entsprechend konditioniert, und sollten Eltern es dann zu korrigieren wagen, erklärt ihnen der Sprössling, dass das verboten ist.

Auch das kleine Einmaleins wird in der Schule zwar vorgestellt, das Üben dagegen nach zu Hause verlagert, was dazu führt, dass Kinder aus den vielbeschworenen bildungsfernen Familien den Bildungswettlauf bereits verloren haben, bevor er richtig angefangen hat. Das Interview [29] mit dem Fields-Medaillisten Laurent Lafforgue lässt mich vermuten, dass es sich hierbei um kein speziell baden-württembergisches Problem handelt:

> *In der Mathematik bestehe ich auf der Bedeutung der elementaren Kenntnisse und auf die Vetrautheit mit Zahlen: addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren. Diese vier Operationen wurden*

> *früher in der Grundschule behandelt, heute wird nur noch die Addition gelehrt.*

Auch die bereits erwähnten Folgen spricht er an:

> *Unter den jungen Mathematikern von heute sind erstaunlich viele Söhne und Töchter von Mathematikern. Wenn ich mich nicht irre, gab es, als ich an der ENS war, keinen einzigen solchen. Wenn die Schule verfällt, wird das familiäre Umfeld unentbehrlich für das Lernen!*

Wie sehr das "familiäre Umfeld" in Deutschland für den Schulerfolg verantwortlich ist, kann man in [41] nachlesen.

Schriftliche Algorithmen sind ebenfalls verpönt und werden, wenn überhaupt, nur noch am Rande unterrichtet. Es werden keine Automatismen eingeübt, weil die Lehrer gelernt haben, dass es darum geht, dass die Kinder die Grundlagen des Rechnens im Dezimalsystem verstehen sollen anstatt sie zu beherrschen. Die durch das Weglassen des Übens frei gewordene Zeit wird in interessantere Themen als Rechnen gesteckt: so befassen sich die Kinder ausgiebig mit Würfelnetzen, Symmetrien und anderen Begriffen, damit sie lernen, dass Mathematik mehr ist als Rechnen.

Tatsächlich macht Kindern wenig so viel Freude wie die Freude am Erfolg, auch und vor allem im Rechnen. Kinder rechnen gerne, wenn man ihnen zeigt, wie es geht und ihnen Raum zur Übung gibt. Forderungen nach mehr Üben an der Grundschule werden allerdings durchgehend ignoriert, egal ob sie von Gymnasiallehrern oder von Didaktikern (vgl. Wittmann [48]) kommen.

## 2. Das Gymnasium

Damit der Übertritt an eine weiterführende Schule auch ohne Fertigkeiten in Kopfrechnen oder schriftlichem Rechnen gelingt, ist der Taschenrechner in Baden-Württemberg ab Klasse 5 Pflicht. Bruchrechnen kann wegen mangelhafter Beherrschung des Einmaleins, der Abschaffung von Primfaktorzerlegungen, ggT und kgV und des verlockenden Griffs zu elektronischen Hilfsmitteln nur noch rudimentär geübt werden. Algebraische Übungsaufgaben, mit denen die älteren Algebrabücher der Mittelstufe bis zum Rand gefüllt waren, gibt es nicht mehr: Brüche mit Variablen tauchen nicht mehr auf, die Lösung quadratischer Gleichungen wird nicht geübt, sondern fast von Anfang an dem graphikfähigen Rechner überlassen, und derselbe Mangel an Übung sorgt für das vorzeitige Ableben der binomischen Formeln und der Potenzgesetze: es gibt kaum mehr Aufgaben, und die wenigen, die noch im Buch stehen, ließen sich zum allergrößten Teil in Sekundenschnelle im Kopf rechnen, wenn man denn des Kopfrechnens noch mächtig wäre. Auch werden in Klasse 9 noch Strahlensatz, der Satz des Pythagoras, sowie die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck besprochen, aber dann ist Schluss: Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen erscheinen nur noch als Tasten $\sin^{-1}$ auf dem Taschenrechner; das Lehrbuch [15] erklärt noch nicht einmal, was es mit diesen Tasten auf sich hat, sondern beschränkt sich darauf zu sagen, welche Tasten man wann drücken muss. Natürlich erfährt man auch nirgends, dass die Hochzahl $-1$ hier nicht dasselbe bedeutet wie kurz zuvor bei den Potenzgesetzen, und nicht nur schlechte Schüler lösen die Gleichung $\sin\alpha = 0,5$ durch Division mit sin nach $\alpha$ auf.

Die Einführung des Logarithmus erfolgt anhand des GTR: diesen lässt man das Schaubild von $y = 2^x$ und $y = 5$ zeichnen und liest daran $x \approx 2,2$ ab. Das einzige

Logarithmusgesetz, das man in [15] findet, ist $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$. Sinus- und Cosinussatz tauchen jeweils als Aufgabe 7 auf [15, S. 180] bzw. als Aufgabe 8 auf [15, S. 183] auf, und der Cosinussatz gar mit dem Kommentar, dass man ihn in einer Formelsammlung finden könne.

Kegelschnitte werden nicht mehr thematisiert, nicht einmal die Gleichung eines Kreises taucht mehr auf, und auch Kugeln sind aus dem Lehrplan der Kursstufe vollständig eliminiert: die Geometrie in den Klassen 10–12 beschränkt sich auf Punkte, Geraden und Ebenen, sowie Winkel und Abstände. Dass es in Sachen "Analysis" kein bisschen besser aussieht, werden wir in den nächsten Abschnitten etwas ausführlicher darlegen.

## 3. Das lange Sterben der Schulanalysis

Der Vorwurf, dass der derzeitige Mathematikunterricht in der Kursstufe überflüssig ist, ist nicht neu; besonders drastisch hat ihn Thomas Sonar [42] artikuliert, der festgestellt hat, dass die Analysis, wie sie heute unterrichtet wird, bestenfalls sinnlos und schlimmstenfalls schädlich ist, und dass man sie daher aus dem Schulunterricht verbannen sollte. Dass ein solcher Vorschlag ernsthaft vorgetragen wird, zeigt vor allem, wie wenig Einsicht man bei den Verantwortlichen in Sachen Bildung überhaupt noch erwartet.

In einer ersten Version dieses Artikels habe ich die folgenden "Definitionen" der Grundbegriffe der Schulanalysis, wie sie in der Buchreihe Lambacher-Schweizer zu finden sind, verglichen mit den entsprechenden Erklärungen in [8], einem mehr als 70 Jahre alten Lehrbuch. Wer mit den heutigen Lehrbüchern vertraut ist, wird nicht überrascht sein zu erfahren, dass es keinen einzigen Begriff gibt, der dort auf irgend eine Art und Weise besser erklärt wäre als in [8]. Erstaunlich dabei ist nicht so sehr die Tatsache, dass die alten Bücher um Längen besser sind als die neuen, sondern die Geschwindigkeit, mit der die Qualität der Schulbücher seit Mitte der 1990er ins Bodenlose gefallen ist.

Wenn ich mich im folgenden vor allem an die Buchreihe von Lambacher-Schweizer halte, dann deswegen, weil unsere Schule diese benutzt; die Philosophie dieser Reihe unterscheidet sich kaum von anderen Reihen, die in Baden-Württemberg zugelassen sind. Ebenfalls betonen möchte ich, dass die Autoren dieser Bücher natürlich nur für die handwerklichen Fehler verantwortlich sind; die Hauptschuld an der mangelhaften Qualität tragen sicherlich die Vorgaben aus dem Ministerium, welche von den Lehrbuchautoren konsequent umgesetzt worden sind.

3.1. **Definition, Satz, Beweis? Fehlanzeige.** Die in Baden-Wörttemberg zugelassenen Schulbücher in Mathematik unterscheiden sich von den früheren rein äußerlich an der Vielzahl von Bildern. Als erstes Beispiel sei hier ein "Forschungsauftrags" aus [13] (sh. Abb. 1) vorgestellt. Ich muss zugeben, dass mir erst nach einigen Jahren aufgegangen ist, dass der Sinn dieser Aufgabe etwas mit der Existenz von Um- und Inkreisen zu tun hat.

Kommen wir also nun zu den "Definitionen" der Grundbegriffe der Oberstufenmathematik.

### Der Funktionsbegriff

Der erste Abschnitt in [16] ist dem Thema "Funktionen" gewidmet, und dieser beginnt wie folgt. Auf dem linken Bild (Abb. 2) sieht man einen netten jungen


ABBILDUNG 1. Forschungsauftrag Malen

Herrn am Telefon, auf dem mittleren einen plot einer Funktion, und im rechten Bildchen den folgenden Text:

> *Der Verkaufsleiter einer Firma liefert für die Verkaufszahlen $v$ eines Produktes in Anhängigkeit der Zeit (in Wochen $w$) folgende Funktionsgleichung:*
>
> $$v(w) = -\frac{20\,000}{w+10} + 2000.$$
>
> *Die Figur zeigt den Graphen der vorgelegten Funktion. Nimm Stellung.*

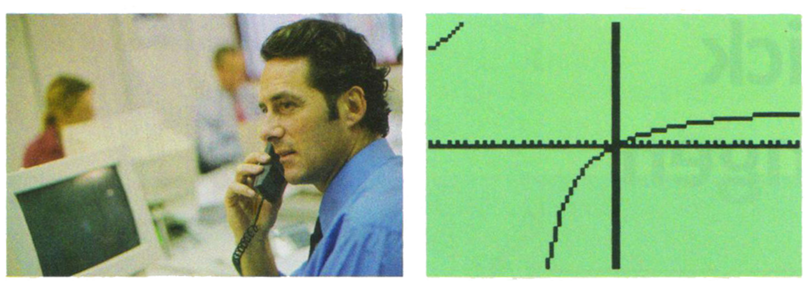


ABBILDUNG 2. Funktionen

Meine Stellungnahme wäre, dass die Vorstellung, Verkaufsleiter würden ihre Verkaufszahlen als Funktionen an die Zentrale melden (und das auch noch telefonisch!), meine Phantasie übersteigt. Es ist ein Irrtum zu glauben, man könne die weniger starken Schüler mit solchen Pseudo-Anwendungen für Mathematik begeistern: das Gegenteil ist der Fall.

Der Funktionsbegriff wird in [16] nicht geklärt; es wird lediglich bemerkt, dass $y = 4 - 5x^2$ eine Funktion ist, dass diese die Höhe eines fallenden Balls modelliert, und dass man sie graphisch veranschaulichen kann. Dafür wird aber der Definitionsbereich einer Funktion "definiert", und zwar so ([16, S. 10]):

> *Die Menge aller Zahlen, die man in die Funktionsgleichung einer Funktion einsetzen darf, heißt* **Definitionsmenge** *der Funktion $f$. Sie wird mit $D_f$ bezeichnet.*

Dies widerspricht dem Funktionsbegriff, wie er in [14] eingeführt wurde: dort war eine Funktion nämlich noch eine Zuordnung, die nicht notwendig durch eine einfache Gleichung gegeben ist. Eine Seite später heißt es dann ([16, S. 11]):

> *Die* **Definitionsmenge** $D_f$ *ist die Menge aller* $x$*-Werte, auf die* $f$ *angewendet wird.*

Das scheint mir nicht ganz dasselbe zu sein; aber es kommt noch besser:

> *Fehlt bei einer Funktion die Angabe von* $D_f$*, so ist stets die maximale Definitionsmenge gemeint*

die aber leider nirgendwo definiert wurde. Oder sollte das die erste der beiden Definitionen gewesen sein?

Sehen wir davon ab, dass hier überhaupt nichts definiert wurde, und tun wir einmal so, als wüssten wir, was die Autoren gemeint haben könnten; dann bleibt immer noch festzustellen, dass die hinter diesen Definitionsversuchen steckende Auffassung von Funktion (ein Ausdruck, in den man etwas einsetzen darf) gegenüber der Dirichletschen Definition einer Funktion, wie sie in [8] benutzt wurde, einen Rückschritt um mehr als 100 Jahre auf die Zeit vor Euler bedeutet.

Und was heißt eigentlich "einsetzen darf"? Darf man in eine Funktion $s(t)$, die den Ort eines Objekts für $0 \le t \le 10$ beschreibt, $t = 11$ einsetzen? Oder $t = -1$? Und wenn nicht, wer verbietet es einem, und warum? Oder darf man in die Funktion $v(w)$ der wöchentlichen Verkaufszahlen $w = 1{,}5$ einsetzen? Und wenn ja, welche Bedeutung hat dieser Funktionswert? Mathematik als Wissenschaft, die sich durch die Klarheit ihrer Begriffsbildungen auszeichnet, ist jedenfalls nicht das Bild, das hier transportiert wird.

In der Folge spielen Definitionsmengen keine Rolle mehr, nicht einmal da, wo sie wichtig wären. Ein Jahr später wird die Verkettung von Funktionen in [17, S. 56] nämlich so definiert:

> *Gegeben sind die Funktionen* $u$ *und* $v$*.*
> *Die Funktion* $u \circ v$ *mit* $(u \circ v)(x) = u(v(x))$ *heißt Verkettung von* $u$ *und* $v$*.*

Probleme bei der Verkettung von Funktionen werden am Beispiel von $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = x^2 - 1$ mit Hilfe der Anzeige eines graphikfähigen Taschenrechners in Beispiel 2 "besprochen". Da Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen, ganz zu schweigen von Gleichungen, in denen Logarithmen auftauchen, ebenfalls abgeschafft worden sind, fragt man sich, warum die Definitionsmenge nicht auch gleich über das Menü des GTR eingeführt wird.

## Maxima und Minima

Neben Tangenten sind Nullstellen, Maxima und Minima das zentrale Thema der schulischen Differentialrechnung gewesen. Mathematikern ist bewusst, dass es ohne Definitionen keine Beweise und damit auch keine Mathematik gibt, wie wir sie seit 2500 Jahren kennen. Definitionen sind also die Fundamente der Mathematik, und es versteht sich von selbst, dass man dabei nicht schludern sollte. Derselben Meinung ist Lambacher-Schweizer: in [14, S. 128] heißt es nämlich

> *Beim Definieren genügt es nicht, nur Beispiele anzugeben.*

Zwei Jahre später werden diese guten Vorsätze in [16, S. 44] wie folgt in die Tat umgesetzt:

Punkte wie A,B, C in Fig. 1 heißen **Achsenschnittpunkte**.
Der x-Wert eines Schnittpunktes mit der x-Achse heißt **Nullstelle**.
Punkte wie $T_1$ und $T_2$ in Fig. 1 heißen **Tiefpunkte**, da benachbarte Punkte keine kleineren y-Werte haben. Entsprechend heißt H **Hochpunkt**.

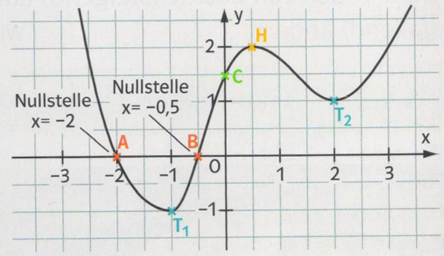



Fig. 1

Auf dieser Grundlage aufbauend ist die Definition von lokalen Maxima sehr einfach ([16, S. 54]):

> *Für eine eindeutige Beschreibung von Hoch- und Tiefpunkten führt man folgende Begriffe ein:*
> - *Wenn der Punkt $H(x_0|f(x_0))$ ein Hochpunkt des Graphen von $f$ ist, so nennt man $f(x_0)$* **lokales Maximum**.
> - *Wenn der Punkt $T(x_1|f(x_1))$ ein Tiefpunkt des Graphen von $f$ ist, so nennt man $f(x_1)$* **lokales Minimum**.
> - *Die $x$-Koordinate eines Hoch- oder Tiefpunkts nennt man* **Extremstelle**, *die $y$-Koordinate heißt* **Extremwert**.

Zusammenfassend ist ein lokales Maximum also die $y$-Koordinate eines Punktes, der aussieht wie ein Hochpunkt: mit dieser Definition lässt sich arbeiten!

Obwohl das Leistungskurssystem in Baden-Württemberg 2004 abgeschafft worden ist und es keinerlei Pläne gibt, dieses wieder einzuführen, hat Lambacher-Schweizer 2012 wieder ein Lehrbuch [18] für diesen nichtexistenten Leistungskurs Analysis veröffentlicht, das statt 200 Seiten wie das gewöhnliche Kursbuch nun 300 Seiten hat (das sind satte 100 Seiten mehr, die man nicht behandeln kann: zum einen fehlt es an der Zeit, zum andern an Schülern, die mit den dazu notwendigen Grundlagen vertraut sind). Dort findet sich auf S. 46 immerhin ein Definitionsversuch von lokalen Maxima und Minima:

**Definition.** *Eine Funktion $f$ hat an der Stelle $x_0$ ein* **lokales Maximum** $f(x_0)$*, wenn es ein Intervall $I$ mit $x_0 \in I$ gibt, sodass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) \le f(x_0)$.*

Es ist durchaus lobenswert, dass hier wenigstens der Versuch gemacht wird, eine saubere Definition zu geben; noch lobenswerter wäre es natürlich gewesen, wenn die Autoren jemanden gefragt hätten, der weiß, wie man es richtig macht, oder wenn sie die entsprechende Definition bei ihren bayrischen Kollegen in [4] nachgeschlagen hätten. Jedenfalls lag es wohl nicht in der Absicht der Schreiber, jeden Punkt $(x_0|x_0)$ auf der Geraden $y = x$ zum lokalen Maximum zu erklären, wie das die Wahl $I = [x_0 - 1, x_0]$ ja wohl nahelegt.

Wie wir oben gesehen haben, wird also selbst bei einem so einfachen mathematischen Objekt wie der Nullstelle einer Funktion $f$ auf eine genaue Definition als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ verzichtet und stattdessen eine schwammige Erklärung bevorzugt; Schüler können damit gar nicht mehr entscheiden, ob die signum-Funktion, sollte sie denn tatsächlich einmal auftauchen, eine Nullstelle hat oder nicht. Auf der andern Seite haben schwammige Definitionen den Vorteil, dass die Autoren sich nicht damit blamieren können: die Periode $p$ einer Funktion wird in [17, S. 152] in der Tat über die Gleichung $h(t+p) = h(t)$ für alle $t$ und ein festes

$p$ definiert (im Zusammenhang mit der Schwingung einer Feder, aber immerhin), und vier Seiten später soll man in Aufg. 4 die Periode der Funktion

$$f(x) = 3\sin(\tfrac{\pi}{6} \cdot (x-6)) + 0,15x + 370$$

bestimmen, die den $CO_2$-Gehalt in der Luft auf Hawaii seit Januar 2000 modelliert.

3.2. **Die Definition der Ableitung.** Die Ableitung wird in [16, S. 17] wie folgt eingeführt:

> *Für eine Kugel, die eine schiefe Ebene hinunterrollt, gelte für den nach der Zeit $t$ zurückgelegten Weg*
>
> $$s(t) = 0{,}3 \cdot t^2$$
>
> *($t$ in Sekunden, $s(t)$ in Meter). Um eine Aussage über die momentane Geschwindigkeit der Kugel zum Zeitpunkt $t = 1$ s nach dem Start zu erhalten, werden die mittleren Geschwindigkeiten für immer kleinere Zeitintervalle betrachtet:*

Dann geht es so weiter:

> *Um die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kugel (in m/s) zu bestimmen, werden die mittleren Änderungsraten von $s(t)$ (in m/s) für die Messintervalle $h$ (in s) berechnet:*

Ein unbedarfter Leser könnte nun auf die Frage kommen, wieso hier auf einmal von Messintervallen die Rede ist, wurde doch der zurückgelegte Weg als Funktion vorgegeben. Was wurde denn jetzt eigentlich gemessen? Die Erklärung liefert ein Vergleich mit dem Vorgängerbuch [9, S. 121]; dort tauchten nämlich zumindest im Prinzip noch Messergebnisse auf, und zwar solche, die Galilei mit "den damals üblichen Längen- und Zeiteinheiten [erhalten haben] könnte". Gerne hätte man über die damals üblichen Zeiteinheiten mehr gewusst, aber offenbar waren auch die Autoren an dieser Stelle mit ihrem Latein am Ende.

Nebenbei sei bemerkt, dass mit den Galileischen "Messintervallen" $h$ (die ja Zahlen sind) wohl die Intervalle $[1, 1+h]$ gemeint sein müssen, auch wenn diese nicht explizit angegeben sind. Jedenfalls werden die Geschwindigkeiten in den "Messintervallen h" mit $h = 1$ s, $h = 0,5$ s und $h = 0,1$ s bestimmt:

$$\frac{0,3 \cdot (1+1)^2 - 0,3 \cdot 1^2}{1} = 0{,}9$$
$$\frac{0,3 \cdot (1+0,5)^2 - 0,3 \cdot 1^2}{0,5} = 0{,}75$$
$$\frac{0,3 \cdot (1+0,1)^2 - 0,3 \cdot 1^2}{0,1} = 0{,}63.$$

Nach einer kurzen graphischen Veranschaulichung kommt jetzt die Definition des Grenzwerts:

> *Die mittlere Änderungsrate $\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$ zeigt ein bemerkenswertes Verhalten: Obwohl der Zähler und der Nenner des Differenzenquotienten gegen Null gehen, nähert sich der Differenzenquotient dem festen Wert 0,6. Dieser Wert wird* **Grenzwert** *genannt.*
>
> *Hierfür schreibt man:*
>
> $$\textit{Für } h \longrightarrow 0 \textit{ gilt: } \frac{s(1+h)-s(1)}{h} \longrightarrow 0{,}6$$

$$\textit{(lies: Für h gegen 0 geht } \frac{s(1+h)-s(1)}{h} \textit{ gegen } 0{,}6).$$

Natürlich nähern sich die mittleren Steigungen auch der 0,59, der 0,5 oder der 0, aber was macht das schon.

Obwohl die Ableitung mit Hilfe von Weg-Zeit-Diagrammen und der Geschwindigkeit eingeführt worden ist, wird der Zusammenhang zwischen Ableitung und Momentangeschwindigkeit nicht präzisiert, sondern (so wie alles andere auch) mittels Beispielen "erklärt".

- [16, S. 24, Aufg. 11] *Beschleunigt ein Auto aus dem Stand mit der Beschleunigung a (in m/s*$^2$*), so gilt für den zurückgelegten Weg:* $s(t) = \frac{1}{2}at^2$*. Die momentane Änderungsrate* $s'(t)$ *ist die Geschwindigkeit* $v(t)$ *(in m/s) des Autos.*
- [16, S. 32, Aufg. 6] *Wird ein Ball senkrecht in die Luft geworfen, so lässt sich die Höhe h (in m) gegenüber dem Boden mit der Formel* $h(t) = h_0+v_0t-5t^2$ *bestimmen. Hierbei ist* $h_0$ *die Abwurfhöhe (in m),* $v_0$ *die Abwurfgeschwindigkeit (in m/s), und t die Flugzeit (in s).*

Nun hat man also den Grenzwertbegriff mehr oder weniger physikalisch eingeführt und weiß (oder könnte wissen), dass bei geradlinigen Bewegungen $s'(t) = v(t)$ die Geschwindigkeit und $v'(t) = a(t)$ die Beschleunigung ergibt; da wäre es, so könnte man meinen, an der Zeit, die Kraft des Kalküls auf die beschleunigte Bewegung loszulassen und zu erklären, warum bei konstanter Erdbeschleunigung $a(t) = -g$ (von ca. 10 m/s$^2$) die Geschwindigkeit eines senkrecht nach oben geworfenen Balls gleich $v(t) = v_0 - gt$ und die Höhe $h(t) = h_0 + v_0t - 5t^2$ sein **muss**.

An dieser Stelle ist den Autoren der Grundgedanke der Differentialrechnung vollkommen unverstanden geblieben: sie ist nicht mehr das Band, das Einzelphänomene erklären kann, vielmehr wird hier (wie an andern Stellen) der Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung nur mehr angedeutet, aber nicht mehr begründet. Nicht einmal die Tatsache, dass $s(t)$ und $s'(t)$ andere Einheiten haben, wird auch nur irgendwie zu erklären versucht (das wird nicht einmal später bei den Integralfunktionen gemacht); vielmehr wird es dem Schüler als vollendete Tatsache vor die Nase gesetzt. Die klassische Anwendung der Mathematik in der Physik verkommt so zu einer Sammlung von Kochrezepten.

Die Einschränkung auf "geradlinige" Bewegungen wird ebenfalls nirgends diskutiert: ist die Ableitung jeder Zeit-Weg Funktion eine Geschwindigkeit, und wenn ja, was für eine?

Auch bei der Einführung der zweiten Ableitung lässt [10] eine klare Linie vermissen: wenn schon die Ableitung als ungefähre Momentansgeschwindigkeit definiert wurde, dann wäre es doch nur recht und billig, man würde die zweite Ableitung als Beschleunigung definieren; stattdessen kommt man jetzt mit nicht definierten Links- und Rechtskurven daher.

**Geschichte machen.** Eine Bemerkung, was Galilei's Messdaten im Besonderen und die Geschichte der Mathematik im Schulunterricht im Allgemeinen betrifft, kann ich mir nicht verkneifen: bei der Motivation der Ableitung als Änderungsrate hieß es, dass Galilei solche Daten gemessen haben *könnte*. Tatsächlich sind uns solche Daten nicht überliefert. Ein Blick in die Werke Galileis genügt, um zu erkennen, dass das wesentliche Hilfsmittel bei der Darstellung und Begründung seiner Mechanik nicht etwa das "Modellieren" von Daten war, sondern die Sprache der euklidischen Geometrie. Da der kümmerliche Rest der heutigen Schulgeometrie nicht ausreicht, um Galileis Werke lesen zu können, muss man wohl zu Geschichtsfälschungen greifen: der Zweck, nämlich die Verbreitung des Märchens, Modellierung habe in der Geschichte des Wissenschaft eine wesentliche Rolle gespielt, heiligt hier die Mittel.

Wer wissen will, wie man Geschichte der Mathematik in Schulbücher einbinden kann, ist mit der Buchreihe [4, 5] bestens bedient: dort kann man auf den ersten Blick erkennen, dass wir in puncto Geschichte der Mathematik im Schulunterricht schon einmal deutlich weiter waren. Heute ist der Unterschied zwischen historischer Wahrheit und Fälschung eher sekundär, solange die erfundenen Geschichten die richtige Botschaft transportieren: auch in [6, Aufg. 23, S. 71] wird erklärt, dass der deutsche Astronom Johannes Kepler (1571–1630) seine Entdeckung des 1. Keplerschen Gesetzes durch eine simple Modellierung aus einer Tabelle mit Umlaufsdauern und mittleren Entfernungen der Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun destilliert habe; Pluto dagegen sei erst 1930 entdeckt worden. Dass Kepler den 1781 entdeckten Uranus ebensowenig gekannt hat wie Neptun, den man 1846 entdeckt hat: geschenkt; dass er auch den Rest der Tabelle nicht gekannt hat, weil die Genauigkeit der ihm bekannten Daten weit unterhalb der in der Tabelle benutzten liegt, und er tatsächlich Jahrzehnte gebraucht hat, um das Gesetz aus den ihm bekannten Daten herauszulesen, weil er ganz andere Parameter verglichen hat: was soll's (um der Wahrheit die Ehre zu geben: in Wirklichkeit hat Kepler nicht sein Gesetz aus den Daten zusammenmodelliert, sondern sein Gesetz zur Berechnung der mittleren Entfernungen aus den relativ gut bekannten Umlaufszeiten benutzt). Aber dass es hier nicht um das erste, sondern um das dritte Keplersche Gesetz geht, das hätten die Autoren vielleicht doch merken können.

Ich weiß nicht, ob hier Böswilligkeit oder Unfähigkeit vorliegt, will heißen: sind sich die Autoren der Tatsache bewusst, dass sie falsche Geschichtchen erfinden, mit denen sie den Schülern die Vorzüge des Modellierens nahebringen, oder sind sie nur nicht in der Lage, mit einer Internetrecherche herauszufinden, wie Galilei und Kepler wirklich vorgegangen sind?

## Ableitung der Grundfunktionen

Heutigen Lehrbuchautoren ist die seit Jahrhunderten bekannte Erkenntnis, dass sich die Potenzfunktion ohne binomische Formeln ableiten lässt, nicht mehr geläufig. Die Verallgemeinerung der "dritten" binomischen Formel $(x-h)(x+h) = x^2 - h^2$ zu

$$u^n - x^n = (u-x)(u^{n-1} + u^{n-2}x + \ldots + ux^{n-2} + x^{n-1})$$

würde die Berechnung der Ableitung

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{u \to x} \frac{u^n - x^n}{u - x} = \lim_{u \to x}(u^{n-1} + u^{n-2}x + \ldots + ux^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

erlauben. Die Notation der Ableitung mit Hilfe des Differentials sucht man im Lehrbuch übrigens vergeblich: Schüler kennen sie nur noch als Menüpunkt im GTR.

Auf [16, S. 33] findet man dagegen die Bemerkung

*Für $n = 4$ erhält man $(x_0 + h)^4 = x_0^4 + 4hx_0^3 + 6h^2x_0^2 + 4h^3x_0 + h^4$,* und der allgemeine Fall wird abgehandelt wie folgt: es wird plausibel gemacht, dass $(x_0+h)^n = x_0^n + n \cdot h \cdot x_0^{n-1} + h^2 \cdot (\ldots)$ ist, und dann lässt man im Differenzenquotienten $h \longrightarrow 0$ gehen. Dabei sind ja nicht einmal mehr die binomischen Formeln für den Exponenten 2 Pflichtstoff.

Für negative ganze Exponenten $z$, sagt das Buch, sei die Ableitung von $x^z$ "aufwändiger"; bei den Ableitungsregeln steht am Ende des Kapitels nur diejenige von $f(x) = x^z$ für $z \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ wird in [16, S. 24] in einer Aufgabe 8 abgehandelt, ohne dass das Ergebnis festgehalten wird. Die Bemerkung, dass die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ ein Spezialfall der Potenzregel ist, weil $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ist, sucht man im ganzen Buch vergeblich. Dies wird dem geneigten Leser erst in [10, S. 18] verraten, im Kapitel "Wiederholung der Ableitungsregeln", und zwar ohne die Bemerkung, dass das bisher nur für die natürlichen Zahlen $n = 2$, 3 und 4 "hergeleitet" und für ganze Zahlen postuliert worden ist.

## Ableitung der trigonometrischen Funktionen

In [9] wird die Ableitung der Sinusfunktion vorgerechnet, wobei "aus einer Formelsammlung" die beiden Identitäten

$$\begin{aligned} \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

benutzt werden. Warum man "aus der Formelsammlung" nicht gleich abgelesen hat, dass $f(x) = \sin x$ die Ableitung $f'(x) = \cos x$ besitzt, blieb das Geheimnis des Lehrbuchs.

Es war daher aus didaktischer Sicht nur konsequent, die ganzen Begründungsversuche zu streichen, und in der Tat findet man in [16, S. 123] nur noch die Bemerkung, dass die Ableitung von $\sin x$ auf dem GTR aussieht wie $\cos x$, jedenfalls wenn man ihn zuvor auf Bogenmaß eingestellt hat.

Warum man das Bogenmaß überhaupt einführt, bleibt in allen betrachteten Lehrbüchern eine Frage, die zu beantworten bisher wohl niemand gewagt hat. Nicht einmal nach Bereitstellung der Kettenregel wird erklärt, was die Ableitung von $f(\alpha) = \sin\alpha$ ist, wenn $\alpha$ in Grad gemessen wird. Stattdessen wird den Schülern beigebracht, dass man in Analysis Bogenmaß und in der Geometrie Grad nehmen muss. Einmal mehr wird hier mit Kochrezepten hantiert, eine Erklärung wird nicht einmal ansatzweise versucht.

## Ableitungsregeln

Die Kettenregel wird, da bleibt das Buch seiner Linie treu, auf S. 59 am Beispiel $f(x) = \sin(3x)$ plausibel gemacht; bei der Formulierung der Kettenregel wird das Problem des Definitionsbereiches nicht angesprochen. Die Produktregel folgt mit Beweis auf S. 62, wobei das Einschieben der Hilfsglieder geometrisch an Hand von Rechtecken veranschaulicht wird, was die Sache allerdings eher noch unverständlicher macht. Die Quotientenregel folgt auf S. 64 aus Produkt- und Kettenregel, auch wenn sie im G8-Zug inzwischen nicht mehr zum Pflichtstoff gehört: Schüler müssen jetzt nur noch $f(x) = \frac{x+1}{x} = (x+1)x^{-1}$ ableiten können, nicht mehr aber $g(x) = \frac{x}{x+1}$: das bringt mich in die seltene Verlegenheit, dass mir der Sarkasmus ausgeht, mit dem ich diese großartige Idee kommentieren könnte.

Die Definition des natürlichen Logarithmus in [17, S. 69] ist die folgende:

> **Definition.** *Für eine positive Zahl $b$ heißt die Lösung der Exponentialgleichung $e^x = b$ der* **natürliche Logarithmus von** *$b$. Man schreibt $x = \ln(b)$. Es gilt $e^{\ln(b)} = b$ und $\ln(e^c) = c$.*

Die beiden letzten Eigenschaften sind Teil der Definition; auf die Existenz des Logarithmus wird nicht eingegangen, und das Thema "Umkehrfunktion" wurde ebenso wie die Ableitung der Logarithmusfunktion in den Abschnitt "Exkursion in die Theorie" verbannt; auf S. 99 erscheint der Logarithmus dann aber als Stammfunktion von $\frac{1}{x}$:

> *Eine Stammfunktion zu $f$ mit $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ findet man in Zusammenhang mit dem natürlichen Logarithmus.*

Was der natürliche Logarithmus mit dem Logarithmus zur Basis 10 zu tun hat, der in Klasse 9 eingeführt wurde, wird den Schülern ebenso vorenthalten wie die Funktionalgleichung $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ des Logarithmus; diese kann man, das muss man zugeben, nur auf Umwegen beweisen, wenn einem die Technik der Substitution fehlt.

## Lineare Substitution

Noch schlimmer sieht es bei der linearen Substitution aus, dem kläglichen Rest der Substitutionsregel in der Integralrechnung, der bei der Plünderung mathematischer Inhalte noch übrig geblieben ist.

Die Begründung der Regel der linearen Substitution (also Substitutionen der Form $z = ax + b$) in [10, S. 101] sieht wie folgt aus: ausgehend von $h(x) = (5x + 1)^3$ findet man dort die denkwürdige Passage

> *Eine Stammfunktion zur Verkettung $h$ ist $H$ mit*
>
> $$H(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot (5x + 1)^4 = \frac{1}{20}(5x + 1)^4.$$

Weitere Erklärungen werden nicht für nötig befunden. Nun ist 5, so viel kann sich der Schüler vielleicht zusammenreimen, die "innere Ableitung" der Funktion $h(x)$. Also, wird er wohl denken, kann man die Stammfunktion von $g(x) = (x^2 + 1)^3$ so ausrechnen:

$$G(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x} \cdot (x^2 + 1)^4.$$

Das ist natürlich falsch, wie man durch Ableiten leicht feststellt; aber warum funktioniert die vorgestellte "Methode" bei $h(x)$, nicht aber bei $g(x)$? Intelligente Schüler könnten sich die Erklärung herleiten, wenn die Regel "lineare Substitution" hieße – eine solche sucht man allerdings vergeblich, vielmehr ist sie als Beispiel 2 unter dem Thema "Stammfunktionen von zusammengesetzten Funktionen" einsortiert, und weder das Wort "linear", noch das Wort "Substitution" wird in diesem Zusammenhang gebraucht.

Auch hier wurde durch die Abschaffung einer Technik (ich rede von der Substitutionsregel bei Integralen, bei der die Leibnizschen Differentiale ihre ganze Macht und Pracht zeigen durften) ein Kochrezept geschaffen, das niemand mehr versteht.

## 4. Realistische Mathematik

Die Frage, wie man den Mathematikunterricht interessanter machen kann, hat Didaktiker schon seit Jahrhunderten beschäftigt. Wie es scheint, hat die Mathematik heute nur deswegen ihre Berechtigung als Lehrfach, weil man sie anwenden kann. Es ist verbürgt, dass sich schon zu Euklids Zeiten Schüler gefragt haben, wozu die Mathematik, die man auf der Schule lernt, gut ist; was uns von Euklid unterscheidet ist die Tatsache, dass ich heute als Mathematiklehrer diese Frage eindeutig beantworten kann (und daraus auch im Unterricht keinen Hehl mache): die ganze "Mathematik", die man in der Sekundarstufe II lernt, dient einzig und allein dem Erwerb des Abiturs und besitzt einige wenige positive synergetische Effekte, wenn man danach ein betriebswissenschaftliches Studium plant.

In der Tat: das Bild der Mathematik, das heutigen Schüler im Unterricht geboten wird, ist das einer vollkommen sinnfreien Beschäftigung, mit der man durch das Abnudeln seltsamer Regeln Antworten auf Fragen erhält, die ähnlich interessant sind wie die scholastischen Fingerübungen über die Anzahl der Engel, die auf einer Tannennadelspitze tanzen können. Dokumentieren möchte ich diesen traurigen Zustand mit einer kleinen Auswahl an Aufgaben aus Schulbüchern und Reifeprüfungen.

Zuvor allerdings seien kurz die Verhältnisse in den Niederlanden geschildert, welche die "realistische Mathematik" (RME - Realistic Mathematics Education) so weit getrieben hat wie vielleicht kein anderes Land. Dort wurde, vornehmlich auf Betreiben des Freudenthal-Instituts an der Universität Utrecht, die "realistische Mathematik" landesweit eingeführt.

Als Holland trotz dieses Trainings in anwendungsbezogenen Aufgaben bei TIMSS und PISA eher schlecht abschnitt, kam Kritik an RME auf. So hat van de Craaft den Artikel [44] veröffentlicht, dessen Titel eine Anspielung auf Morris Klines Buch [25] ist, in dem dieser das Mengenlehredesaster der "Neuen Mathematik" beschrieben hat. Reformbefürworterin Marja van den Heuvel-Panhuizen vom Freudenthal-Institut hat das geärgert (sh. [75]):

> *The opponents of RME have as their leader, a professor in mathematics, who used to teach at a military academy.*

Neben einer originellen Zeichensetzung kann man hier den Versuch einer ad-hominem-Argumentation bewundern.

Auch in Holland darf man im Jahre 2005 dem Loblied [56] auf die gelungene Reform lauschen; drei Jahre später beklagt sich Klaas Landsman von der Universität Nijmegen, dass die Zahl der Mathematikstudenten in den Niederlanden zwischen 1975 und 2005 um 70 % zurückgegangen ist (vgl. auch die lesenswerten Artikel von Wittmann [47] und Kaenders [23] über die Probleme der Niederlande mit ihrem Mathematikunterricht). In den letzten Jahren hat sich die Dramatik etwas entschärft, schreibt Landsman in [31], weil die Universitäten inzwischen rausgehen und

> *den Teenagern zeigen, wie Mathematik* wirklich *in Wissenschaft und Gesellschaft angewandt wird.*

Damit kommen wir zu einer Auswahl an Modellieraufgaben, mit denen wir heutzutage unsere Schüler beglücken.

### Der Brachiosaurier

Wir beginnen mit einer Abituraufgabe aus NRW (2007) für Leistungskurse (!) mit CAS:

> *Computergrafiken gewinnen in unserer Gesellschaft immer größere Bedeutung. Nach den ersten Anfängen in den 80er Jahren hat sich die Computertechnik mittlerweile so weit entwickelt, dass wir sogar in der Lage sind, längst ausgestorbene Lebewesen wieder zum Leben zu erwecken. Nicht nur die Filmindustrie, sondern auch die Wissenschaft hat den Wert der neuen Techniken mittlerweile erkannt. Paläontologen rekonstruieren beispielsweise das Aussehen von Dinosauriern anhand ihres Skeletts. Das komplette Skelett eines ausgewachsenen Brachiosauriers wird im Museum für Naturheilkunde zu Berlin ausgestellt. Das Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik an der TU Berlin hat das Knochengerüst vermessen und grafisch aufgearbeitet.*

Sogar die Abiturprüfung wird dazu missbraucht, um den Schülern zu suggerieren, sie hätten mit der ganzen Modelliererei in ihren letzten zwei Jahren Schulunterricht etwas Sinnvolles gelernt.

Im Original folgt nun eine Skizze eines Brachiosauriers in einem Koordinatensystem. Dann kommt die eigentliche Aufgabe:

> *1. Die Haut über der Wirbelsäule (mit Schwanz) soll mit Hilfe der Graphen von Funktionen modelliert werden. Ziel ist es, so weitere Daten und Informationen über den Saurier gewinnen zu können. Die Linie vom Kopf über die Wirbelsäule bis zum Schwanz wird im Folgenden stets als Rücken bezeichnet.*
> *(a) Ermitteln Sie eine Funktionsvorschrift, deren Graph den Rumpfbereich ($x \in [4; 11]$) modelliert; gehen Sie dabei davon aus, dass in $P(7|6)$ ein Sattelpunkt vorliegt.*
> *(b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion aus Teil a) in die beigefügte Abb. 2 und notieren Sie Ihre Wertetabelle.*
> *(c) Modellieren Sie den verbleibenden Kopf- und Schwanzbereich jeweils durch geeignete Funktionen und begründen Sie in beiden Fällen Ihre Wahl (ggf. auch mit Hilfe einer Skizze).*
> *(d) Nennen Sie eine weitere, zu Teilaufgabe a) alternative Methode, die den Rumpfbereich des Saurierrückens funktional modelliert.*
> *Benennen Sie die Vor- und Nachteile dieser und der in der Teilaufgabe a) beschriebenen Modellierung.*

Im zweiten Teil der Aufgabe, der hier nicht wiedergegeben wird, geht es um das Wachstum von Brachiosauriern, deren Wachstumsrate durch eine Funktion mit diversen Parametern gegeben ist.

Zu der Umsetzung der Aufgabe schreibt Epkenhans [58]:

> *Wollte man den Brachiosaurier tatsächlich zum Leben erwecken, so wäre im schulischen Kontext eine Modellierung mit Funktionenscharen sinnvoller, Veränderungen eines Parameters würden dann die Bewegung simulieren.*

Vermutlich würde es das – aber wozu? Letztendlich wird die Bewegung von der Modellierung festgelegt und nicht, wie es sein sollte, umgekehrt. Weitere Unstimmigkeiten folgen:

> *Die Nachteile dieser Modellierung sind schnell erkennbar [...] Der Schwanz ist eine monoton fallende Exponentialfunktion, ein leichtes*

> *Anheben der Spitze ist daher unmöglich. Am Übergang vom Rücken zum Schwanz ist eine Unstetigkeitsstelle von ca. 30 cm.*

Vielleicht soll diese Unstetigkeitsstelle die Rückenschmerzen modellieren oder erklären, warum die Dinosaurier ausgestorben sind. Welche Informationen wir darüberhinaus aus der "funktionalen Modellierung" von Rücken und Schwanz gewonnen haben, hat sich mir nicht wirklich erschlossen.

## Vom Fisch zum schwarzen Loch

Mathematik ist überall, auch in der Biologie. Die folgende Aufgabe [17, Aufg. 14, S. 151] ist nachgerade typisch für die moderne Aufgabenkultur.

> *Ein Fisch schwimmt in einem Bach mit der konstanten Geschwindigkeit x m/s relativ zum Wasser. Die Energie E (in Joule), die er dazu benötigt, hängt von seiner Form und von seiner Geschwindigkeit x ab. Aus Experimenten weiß man, dass die Energie mit*
>
> $$E_k(x) = c \cdot \frac{x^k}{x-2}$$
>
> *modelliert werden kann. Hierbei ist $c > 0$ eine Konstante und $k > 2$ ein Parameter, der von der Form des Fisches abhängt: Je "plumper" der Fisch ist, desto größer ist der Parameter k.*
>
> *a) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Energieaufwand des Fisches am geringsten?*
>
> *b) Erläutern Sie, wie die energiesparendste Geschwindigkeit eines Fisches von seiner Form abhängt.*

Als erstes fällt auf, dass hier eigentlich von Energieverbrauch (also Joule pro Sekunde) die Rede sein sollte anstatt von Energie[1]; in der vorgestellten Form ist die Aufgabe völlig sinnfrei. Zweitens ist der Drang, Mathematikaufgaben als Interpretation von Messergebnissen zu präsentieren, so groß, dass man glaubt, man könne den Energieverbrauch eines Fisches beim Schwimmen genauso problemlos messen wie den Energieverbrauch eines Kühlschranks. Drittens fragt man sich natürlich, was passiert, wenn der Fisch langsamer als 2 m/s schwimmt; in diesem Fall scheint der Energieverbrauch (also das, was die Autoren mit Energie verwechselt haben) negativ zu sein. Wobei der Fisch natürlich nicht auf eine Geschwindigkeit unter 2 m/s abbremsen kann, weil der Energieverbrauch bei $x = 2$ m/s sonst unendlich groß wird und der Fisch sich dabei in ein schwarzes Loch verwandelt, das nicht nur den Bach, sondern die gesamte Erde einschließlich des Lambacher-Schweizer verschlingt.

Neu sind sinnfreie Aufgaben natürlich nicht; eine mindestens ebenso peinliche Aufgabe ist dem Physiker Richard Feynman [1, S. 387–388] bei der Durchsicht von Schulbüchern über den Weg gelaufen. Dort wurden Schüler aufgefordert, die "Gesamttemperatur" von sieben Sternen auszurechnen.

## Wirtschaft

---

[1] Dass die Aufgabensteller nicht wissen, was Energie ist oder wie man sie messen kann, passt ins Bild der Zeit: im Physikunterricht Baden-Württembergs wurde der Begriff der Energie schrittweise zurückgefahren und durch Entropie ersetzt. Übrigens ist auch das Newtonsche Gravitationsgesetz oder das Bohrsche Atommodell Schnee von gestern, ebenso wie der schiefe Wurf: inzwischen fällt im Physikunterricht alles nur noch senkrecht nach unten, und das vermutlich deswegen, weil, wie bereits Aristoteles gezeigt hat, der natürliche Ort aller schweren Dinge unten ist.

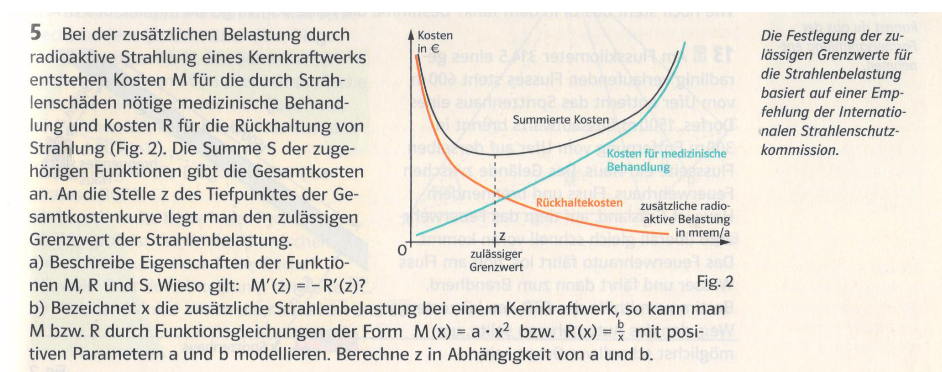
Aufgaben zur Maximierung von Gewinnfunktion (es wird immer nur der Gewinn maximiert, Aufgaben zur Maximierung der Beschäftigtenzahlen habe ich noch keine einzige gesehen) sind keine Erfindungen der neusten Reformen (vgl. auch Kühnel [27]) – was neu ist, ist die Häufigkeit, mit der sie auftreten, und das Niveau der Einkleidung, wie etwa bei der Abituraufgabe von 2007 (Nachtermin, BW). Dort durfte man Folgendes lesen:

> *Eine Firma produziert einen neuen MP3-Player. Marktanalysen haben ergeben, dass die wöchentlichen Verkaufszahlen durch die Funktion $f$ mit*
>
> $$f(t) = 1000te^{-0{,}1t}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$
>
> *modellhaft beschrieben werden können. ($t$ in Wochen nach Verkaufsbeginn, $f(t)$ in Stückzahl pro Woche.)*

Mit dieser Marktanalyse vor Verkaufsbeginn sollte man dann die Verkaufszahlen im ersten Jahr bestimmen. Verglichen mit solchen "Anwendungen" der Mathematik ist Astrologie eine harte Wissenschaft.

Zwei Aufgaben jenseits der moralischen Schmerzgrenze sollen zeigen, welches Bild künftige Schülergenerationen von Mathematikern haben dürften.

*1. Kernkraftwerke und medizinische Folgekosten.* Die folgende Anwendung der Mathematik (Abb. 3) stammt aus [16, Aufg. 5, S. 65].



**5** Bei der zusätzlichen Belastung durch radioaktive Strahlung eines Kernkraftwerks entstehen Kosten M für die durch Strahlenschäden nötige medizinische Behandlung und Kosten R für die Rückhaltung von Strahlung (Fig. 2). Die Summe S der zugehörigen Funktionen gibt die Gesamtkosten an. An die Stelle z des Tiefpunktes der Gesamtkostenkurve legt man den zulässigen Grenzwert der Strahlenbelastung.
a) Beschreibe Eigenschaften der Funktionen M, R und S. Wieso gilt: $M'(z) = -R'(z)$?
b) Bezeichnet x die zusätzliche Strahlenbelastung bei einem Kernkraftwerk, so kann man M bzw. R durch Funktionsgleichungen der Form $M(x) = a \cdot x^2$ bzw. $R(x) = \frac{b}{x}$ mit positiven Parametern a und b modellieren. Berechne z in Abhängigkeit von a und b.



Fig. 2

*Die Festlegung der zulässigen Grenzwerte für die Strahlenbelastung basiert auf einer Empfehlung der Internationalen Strahlenschutzkommission.*

Abbildung 3. Kernkraftwerk und Folgekosten

Diese Aufgabe spricht für sich selbst; der Unterschied zu den Einsparungen durch Entsorgung von Behinderten in der NS-Zeit scheint mir eher graduell zu sein.

*2. Die verlorene Ehre der Mathematik, oder die Subjektivität der Wahrheit.* Eine ganz andere Rolle der Mathematik wird in folgender PISA-Aufgabe beleuchtet, die V.A. Vassiliev vom Steklov Institut in einem Leserbrief an die Notices of the AMS vom September 2004 anführt:

> *In einem bestimmten Land beträgt der Verteidigungshaushalt 30 Millionen Dollar für 1980. Der gesamte Haushalt beläuft sich auf 500 Millionen Dollar. Im folgenden Jahr ist der Verteidigungshaushalt 35 Millionen Dollar, der Gesamthaushalt 605 Millionen Dollar. Die Inflationsrate in diesem Zeitraum beträgt 10 Prozent.*

> *a) Sie sind eingeladen, einen Vortrag für eine pazifistische Gesellschaft zu halten. Sie haben die Absicht zu erklären, dass der Verteidigungshaushalt in diesem Zeitraum abgenommen hat. Erklären Sie, wie Sie vorgehen.*
>
> *b) Sie sind eingeladen, einen Vortrag an einer Militärakademie zu halten. Sie haben die Absicht zu erklären, dass der Verteidigungshaushalt in diesem Zeitraum zugenommen hat. Erklären Sie, wie Sie vorgehen.*

Dadurch werde Mathematik, so Vassiliev, als Werkzeug für politische Prostitution missbraucht, und er bemerkt weiter:

> *Dieses Dokument wurde 1999 veröffentlicht und wurde von 32 nationalen Bildungsorganisationen anerkannt. In all diesen Jahren hat niemand mit Grausen aufgeschrieen, wie ich es jetzt mache; bedeutet das nicht, dass alle Leser und diejenigen, die dies umgesetzt haben (vor allem Lehrer und andere Erzieher), mit dieser "Identifizierung und diesem Verständnis der Rolle, die Mathematik in dieser Welt spielt" einverstanden sind? Was haben wir getan, um diese Schande zu verdienen?*

Dass man das auch anders sehen kann, zeigt Werner Blum; in [53, S. 7] schreibt er:

> *In den meisten Ländern spielt Modellieren (im breiten ebenso wie fast noch mehr im eigentlichen Sinne) eine Nebenrolle in der täglichen Unterrichtspraxis in Schule und Universität. Es überwiegen formale Rechnungen, und Beispiele für Anwendungen werden, wenn überhaupt, nur als Illustrationen behandelt und werden als solche nicht ernst genommen. Sogar kompetente und engagierte Lehrer folgen oft nicht diesen wohlbegründeten Empfehlungen und Vorschlägen der Mathematikdidaktiker. Warum ist das so?*

Dass man Schüler mit diesen "Modellierungsaufgaben" für Mathematik begeistern kann, ist eine Aussage, die inzwischen gar nicht mehr hinterfragt wird. Auch die Bundesbildungsministerin Prof. Wanka meinte in einem Interview aus dem Jahre 2013 (Newsletter Stiftung Rechnen, 03/2013):

> *Der enge Bezug zur Anwendung ist meines Erachtens der Schlüssel dafür, Schülerinnen und Schüler für die Mathematik zu begeistern.*

Bereits auf die nächsten Frage, warum sie selbst Mathematik studiert habe, antwortet sie aber u.A.

> *Ich habe bereits in der Schulzeit an Mathe-Olympiaden teilgenommen.*

Und die sind ja für ihren engen Bezug zur Anwendung bekannt.

## 5. Noch' ne Leitidee: Geometrie und Stochastik

### Realitätsnahe Geometrie

Welches Bild der Mathematik erhalten Schüler, wenn ihre Lehrer sich für die Blödheit der Aufgaben entschuldigen müssen? Was erwarten wir vom Schulunterricht, wenn der Lehrplan von Leuten gemacht wird, die nicht unterrichten, und wenn die anwendungsbezogenen Aufgaben von Leuten kommen, die noch nie eine

Anwendung der Mathematik gesehen haben? Und welche Schüler überzeugt man mit derartigem “Anwendungsbezug” davon, dass das Studium der Mathematik etwas Lohnenswertes ist oder gar etwas, das Spaß macht? Vermutlich sind es solche, die dann später Vorträge mit dem Titel “Hurra, Hurra, die Feuerwehr ist da oder: Schulgeometrie ausnahmsweise realitätsnahe” halten, in dem Mittelpunkt und Mittelsenkrechte mit der Positionierung eines Notfallhubschraubers (oder, wie im Originalartikel [55], “von einem Notfallhubschrauber”) in Südtirol motiviert werden (auch in [51] werden Rettungshubschrauber positioniert, diesmal in Rheinland-Pfalz; empfohlen wird dabei der Einsatz von Geometrie-Software, “da die explorative Bestimmung des Mittelpunkts auf verschiedene Weisen möglich ist”). Diese seltsame Art und Weise, Schülern Mittelsenkrechten schmackhaft zu machen, wurde dann in [57] aufgegriffen:

> *Die Bürger von A-Stadt, B-Stadt und C-Stadt bekommen einen neuen Flughafen. Wo soll dieser gebaut werden?*

Wie es scheint, wollen diese Bürger den Flughafen alle möglichst nahe bei sich haben. Dass es in Wirklichkeit genau andersherum ist und Flughäfen gar nicht weit genug weg sein können, scheint die Freunde der realitätsbezogenen Mathematik in keinster Weise zu stören.

## Raub- und Singvögel

Auch die zentrale schriftliche Abiturprüfung aus Berlin-Brandenburg vom Jahre 2012 zeigt, zu welchen Lesitungen die moderne Mathematik fähig ist:

> *Ein Raubvogel gleitet geradlinig gleichförmig in der Morgensonne über den Frühnebel. Er befindet sich in einer Höhe von 830 m in* $P_0(3260|-1860|830)$ ...

Halten wir kurz inne: wer befindet sich in 830 m Höhe – der Raubvogel oder der Frühnebel? Und warum ist die Höhe von 830 m angegeben, obwohl sie als Koordinate in $P_0$ auftaucht?

> ... *und eine Sekunde später in* $P_1(3248|-1848|829)$.

Es wird wohl doch der Raubvogel sein. Aber was ist mit dem Frühnebel?

> *Im selben Zeitraum fliegt ein Singvogel geradlinig gleichförmig im morgendlichen Frühnebel von* $Q_0(800|-600|200)$ *nach* $Q_1(796|-592|201)$*, 1 LE = 1m.*

Gesucht sind die Flugbahnen der Vögel, und danach muss man bestätigen (die richtige Antwort ist also schon vorgegeben), dass die Geschwindigkeiten der Vögel 61,2 km/h bzw. 32,4 km/h sind. Die Flugbahnen sind dann als windschief nachzuweisen, indem man “die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren” nachrechnet und den Abstand der beiden Geraden bestimmt. Die Grenze des Frühnebels wird durch eine Ebenengleichung bestimmt, dann gibt es eine Verfolgungsjagd, und am Ende bittet der Schüler seinen Schöpfer auf Knien, dass das die letzte Begegnung mit der Mathematik in seinem Leben gewesen sein möge.

## Die Tücken der Stochastik

In [19, S. 246] aus dem Jahre 2009 findet sich die folgende Aufgabe samt Lösung:

> *Merle behauptet, sie hätte mit zwei Würfeln einen Pasch gewürfelt. Klaus will dagegen wetten. Er weiß, dass die Wahrscheinlichkeit*

*für einen Pasch* $\frac{6}{36}$ *beträgt. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt also* $\frac{5}{6}$.

*Peter, Merles Bruder, verrät: "Einer der Würfel ist eine 5". Haben sich mit dieser Information Peters Gewinnchancen verändert?*

*Antwort: Ja. Es gibt 11 Ergebnisse, bei denen der Würfel eine 5 zeigt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch beträgt mit dieser Information nur noch* $\frac{1}{11}$.

Auf den ersten Blick scheint das richtig zu sein. Sei

A. Es liegt ein Pasch vor.
B. Einer der beiden Würfel ist 5.

Dann ist
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11}.$$

Tatsächlich ist die Lösung Unsinn: das gleiche Ergebnis erhält man nämlich, wenn man weiß, dass einer der beiden Würfel eine $1, 2, \ldots, 6$ zeigt. Also müsste die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch immer auf $\frac{1}{11}$ fallen, sobald Peter einen Blick auf die gewürfelten Zahlen wirft: Schrödingers Katze lässt grüßen.

Richtig ist folgende Lösung: Wenn der Würfel, von dem Peter die Augenzahl abliest, eine 5 zeigt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der andere Würfel ebenfalls eine 5 zeigt, gleich $\frac{1}{6}$.

Wer sich mit den klassischen Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung auskennt, der weiß, dass diese Frage eine Adaption des klassischen "boy or girl"-Paradoxons ist:

> *Herr Schmidt hat zwei Kinder; mindestens eines davon ist ein Junge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kinder Jungen?*

Da Problem geht auf eine Veröffentlichung von Martin Gardner im Scientific American von 1959 zurück; seine ursprüngliche Antwort hat er später dahingehend modifiziert, dass die Frage nicht genau genug ist: die Antwort hängt nämlich von der Auswahl der Familien ab:

- Werden alle Familien mit zwei Kindern betrachtet, von denen eines ein Junge ist, dann ist die Antwort $p = \frac{1}{3}$;
- Wird von allen Familien mit zwei Kindern ein Kind ausgesucht, das sich dann als Junge herausstellt, dann ist die Antwort $p = \frac{1}{2}$.

Übertragen auf das Beispiel der Würfel bedeutet das:

- Werden alle Würfe betrachtet, von denen einer eine 5 zeigt, dann ist die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{11}$;
- Wird von allen Würfen ein Wurf herausgesucht, von dem man dann feststellt, dass er eine 5 zeigt, dann ist die Antwort $p = \frac{1}{6}$.

Im Gegensatz zu Gardners Beispiel ist im Falle der Würfelgeschichte klar, dass es sich um die zweite Variante handeln muss.

Das Problem dabei ist nicht, dass hier ein Fehler im Schulbuch vorliegt; ich halte es vielmehr für eine gefährliche Sache, den Schülern zu suggerieren, die Anwendung von Wahrscheinlichkeit und Statistik sei ein Kinderspiel: das Gegenteil ist der Fall. Den mit Abstand unverschämtesten Versuch, die Wahrscheinlichkeitstheorie zu trivialisieren, findet man in Aufgabe 45.(D) auf S. 481 im Lehrbuch Mathematik (Duden) für die Kursstufe (im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten):

> *Diskutieren Sie folgende Aussagen: [...] (D) Gott würfelt nicht.*
> *(*ALBERT EINSTEIN*)*

Was gibt es da zu diskutieren, wenn man von Einstein, Podolski und Rosen weder etwas gehört hat, noch versteht, worum es dabei geht? Sollen wir, wie es der Hamburger Bildungsplan vorschreibt, die Kompetenz der Gesprächsführung loben? Oder die Fähigkeit, zu allem und jedem etwas sagen zu können, ohne den Schimmer einer Ahnung zu haben?

Dass man selbst bei einfachen Anwendungen der Statistik hereinfallen kann, zeigt ein Blick in die NIMBUS-Studie [50], in der die Notenschnitte vor und nach der Abschaffung von Grund- und Leistungskursen in Baden-Württemberg verglichen werden. Dort findet man folgende Tabelle, in welcher die Notenschnitte der Grund- und Leistungskurse getrennt nach Geschlechtern aufgeführt sind:

| Jahr | M-GK | M-LK | J-GK | J-LK |
|---|---|---|---|---|
| 2002 | 8,2 | 10,6 | 8,0 | 10,9 |
| 2003 | 8,6 | 10,6 | 8,1 | 10,4 |
| Durchschn. | 8,4 | 10,6 | 8,0 | 10,6 |

Die Folgerungen, welche die NIMBUS-Gruppe daraus ziehen, sind:

- Die Durchschnitte zeigen keinen signifikanten Unterschied zwischen den Geschlechtern.
- Die Notenverteilungen zwischen Mädchen und Jungen ähneln sich.

Auf den ersten Blick mag das so scheinen. Das Problem dabei ist: den Leistungskurs wählten etwa (ebenfalls nach [50]) ein Viertel der Mädchen und etwa die Hälfte der Jungen. Nach der 2004 erfolgten Abschaffung dieser Trennung abschafft bestand die Gruppe der Mädchen zu drei Vierteln aus Schülerinnen mit einem Schnitt von 8,4 Punkten und zu einem Viertel aus solchen mit einem Schnitt von 10,6 Punkten, während bei Jungs das Verhältnis etwa 1:1 war. Wenn man der Einfachkeit halber annimmt, dass das Niveau nach 2004 irgendwo zwischen Grund- und Leistungskurs liegt (vom mathematischen Inhalt her ist das eher zweifelhaft, aber bezogen auf das Leistungsspektrum mag das durchaus so sein), dann müssen sich die Mehrzahl der Mädchen seither mehr anstrengen, um die gleiche Note zu erhalten, während dieses Phänomen bei Jungs sich ausgleicht, da die eine Hälfte sich weniger anstrengen muss. Aus diesen Gründen muss sich der Notenunterschied mit der Abschaffung von Grund- und Leistungskursen verschärfen, und zwar nicht aus inhaltlichen, sondern aus rein statistischen Gründen.

Die NIMBUS-Gruppe dagegen wundert sich, dass die Durchschnittsnoten der Mädchen seit 2004 um einen Punkt schlechter sind als die der Jungs, während es vorher doch keinen geschlechterspezifischen Unterschied gegeben habe; weil diese Verschlechterung mit der Einführung des GTR einherging, diagnostiziert man – post hoc propter hoc – eine "GTR-Schwäche von Mädchen", die es zu beheben gelte.

## Die Grundlagen der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist in Baden-Württemberg seit der Einführung des G8-Zugs, in dem man die Schulzeit um ein Jahr gekürzt und gleichzeitig die Stochastik eingeführt hat, abiturrelevant und wird in Klasse 10 erstmals besprochen. Da die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ nicht mehr zum Pflichtprogramm gehört, werden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{r}$ als die Anzahl der Pfade ($r$ Treffer bei $n$ Versuchen) definiert, die sie zählen sollen. Die Berechnung dieser Zahlen funktioniert in [16, S. 139] so:

> *Für große $n$ und $r$ ist es mühsam, die $\binom{n}{r}$ Pfade am Baumdiagramm abzuzählen. Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{r}$ kann man dann einfacher mit dem GTR bestimmen (Fig.1 ).*

In "Fig. 1" ist dann das Menü eines GTR mit dem Menüpunkt `nCr` (daher auch die seltsame Bezeichnung $\binom{n}{r}$ statt des geläufigen $\binom{n}{k}$) zu sehen. Die Formel $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ ist in Aufgabe 9e) versteckt, allerdings ohne Hinweis auf den Sonderfall $r = 0$; vermutlich soll auch hier der GTR weiterhelfen, der uns auf Anfrage mitteilt, dass $0! = 1$ ist.

Nimmt man eine Einführung in die Wahrscheinlichkeit auf Schulniveau ernst, muss man Kombinatorik machen. Das kostet aber Zeit, die man gerne dazu nutzen möchte, den Schülern die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Testen von Hypothesen unter die Nase zu reiben. Also lässt man das Fundament weg und baut sein anwendungsorientiertes Schloss in der Luft – der Didaktiker lehnt sich auf seinem Sofa zurück im festen Glauben, einmal mehr die Schüler vom Nutzen der Mathematik überzeugt zu haben, der Lehrer dagegen steht vor seiner Klasse und fragt sich, wie man Binomialverteilung ohne Binomialkoeffizienten erklärt.

Auf diesen Grundlagen aufbauend wird dann der "Graph" von Binomialverteilungen untersucht; es wird mitgeteilt, dass der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable $X$ sich zu $E(X) = n \cdot p$ ergibt, was man für $n = 3$ und $n = 4$ als Aufgabe nachrechnen darf. Weiter wird auf [16, S. 147] ohne den Hauch einer Begründung erklärt, dass das Maximum der Graphen "sich bei der Stelle $\mu = n \cdot p$" befinde, dass es aber sein könne, dass der Erwartungswert nicht ganzzahlig ist.

Im Abitur 2015 (BaWü) war in Aufg. 8 des "Pflichtteils" ein Ausschnitt einer Tabelle einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben, der eine Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{5}$ und einem unbekannten $n$ zugrunde lag. Das Maximum der Verteilung lag bei $k = 4$, und zu bestimmen war, ob $n = 20$, 25 oder 30 ist. Um die Aufgabe zu lösen, müssen sich Schüler also daran erinnern, dass es hier um die Binomialverteilung geht (die Sache mit den unverstandenen Binomialkoeffizienten), dass der Erwartungswert bei $\mu = n \cdot p$ liegt (was man mangels Beweisen glauben muss), und dass das Maximum bei ganzzahligem Erwartungswert bei $\mu$ liegt (könnte man beweisen, wird aber nicht bewiesen, muss also ebenfalls geglaubt werden). Die Frage, wie viel Mathematik ein Schüler gelernt hat, der bei dieser Aufgabe erfolgreich abschneidet, sei hiermit in den Raum gestellt.

## 6. Der Siegeszug des Taschenrechners

Es steht außer Frage, dass die Entwicklung der Computer einen großen Einfluss auf die Arbeitsweise vieler Mathematiker gehabt hat: der erste computergestützte Beweis der Vierfarben-Vermutung machte noch Schlagzeilen, bei neueren Resultaten wie der Kepler-Vermutung oder der ternären Goldbach-Vermutung ist die Rolle des Computers in den entsprechenden Zeitungsmeldungen bereits in den Nebensatz verbannt.

Dass daraus folgt, dass Computer in den Mathematikunterricht gehören, sehe ich dagegen nicht. Es gibt Lehrer, die mit dem Falten eines Blatts Papier oder mit einem antiquierten Rechenschieber mehr Mathematik transportieren können als andere mit Taschenrechnern, Laptops, Tablets, Whiteboards und Wikipedia zusammen (an manchen Schulen in den USA wird inzwischen mit dem Abakus experimentiert): warum überlässt man die Wahl der Krücken aber nicht den Lehrern?

Jede technische Erfindung, sei es Radio, Fernsehen, Videofilme, programmierbare Rechner oder Computerspiele, hat Propheten auf den Plan gerufen, nach denen die jeweilige Erfindung das Lernen der Mathematik von Grund auf revolutioniere und von allen bisherigen Problemen befreie. Das war auch beim Taschenrechner nicht anders: kaum war dieser erschwinglich geworden, sahen Didaktiker das Gleichgewicht des Unterrichts gestört und folgerten, dass man darauf reagieren müsse, und zwar mit der Abschaffung des schriftlichen Rechnens und der Beherrschung des kleinen Einmaleins. Besonders laut tönt es natürlich aus dem Land, das an der flächendeckenden Einführung dieser Geräte am meisten verdient: Ralph Ralston [73] aus den USA möchte den Taschenrechner inzwischen gerne schon im Kindergarten eingeführt sehen (es sei wenigstens auf [20] verwiesen, wo der Zahlentheoretiker Ehud de Shallit das schriftliche Rechnen gegenüber Ralston verteidigt hat; Ähnliches kann man auch in [30] finden).

Der Taschenrechnerpapst Deutschlands ist Hartwig Meißner von der Universität Münster, der zeit seines Lebens über den Gebrauch des Taschenrechners an deutschen Schulen geforscht hat, und zwar fast von Anfang an mit nicht unerheblichen Drittmitteln aus den Hause TI. In [67] schreibt er:

> *Analysiert man die Schulbücher und Lehrpläne von heute für den Arithmetikunterricht in der Grundschule, so kommt man zu einem beschämenden Ergebnis: Wir unterrichten in der Grundschule Kopfrechnen, Schriftliches Rechnen, Überschlagen, Schätzen usw. praktisch wie vor 30 Jahren und tun durchweg so, als gäbe es gar keinen Taschenrechner.*

Analysiert man die Lehrpläne für den Kunstunterricht, so kommt man zu einem ähnlich beschämenden Ergebnis, dass man nämlich Malen immer noch so unterrichtet, als gäbe es keine Digitalkameras oder Photoshop. Auch Krauthausen [64] propagierte schon früh die Abschaffung des schriftlichen Rechnens auf der Grundschule.

## Die Tücken des GTR

Vorteile des Einsatzes von “Taschencomputern” gibt es natürlich auch: in der Studie [77] habe ich folgendes Kleinod entdeckt:

> *Größere Individualisierung bei Lösungsstrategien, eine größere Lösungsvielfalt [...] z.B. beim Gleichungslösen, etwa bei $x^3 - 5x - 4 = 0$.*

Mit Taschencomputern kann man diese Gleichung, wie der Autor feststellt, auf vier verschiedene Arten lösen, nämlich durch das Eintippen von

1. $\dfrac{x^3 - 5x - 4}{x - 1} =$
2. $\texttt{factor}(x^3 - 5x - 4) =$
3. $\texttt{solve}(x^3 - 5x - 4) =$
4. $\texttt{nSolve}(x^3 - 5x - 4 = 0, x) =$

Das klingt fast schon nach

> *So hat zum Beispiel ein Schüler einen “Sessel” bei Potenzfunktionen der Art $f(x, y) = x^m y^n$ mithilfe eines 3D-Koordinatensystems entdeckt.*

Dieses Forschungsresultat habe ich [79, S.9] entnehmen dürfen.

In Wirklichkeit erfordert die korrekte Bedienung des GTR, z.B. des TI-84 Plus, Einiges an Übung, die anderswo eingespart werden muss. Eine vergessene Klammer, die früher einen Abzug von 1 Verrechnungspunkt zur Folge gehabt hätte, führt bei Aufgaben, in denen alles vom GTR abhängt, zur Höchststrafe, also bis zu 15 Verrechnungspunkten (das ist ein Viertel der im gesamten Abitur maximal erreichbaren Punktezahl). Andere kleinere Fehler, wie die Verwechslung des Abziehminus (das Minuszeichen zwischen zwei mathematischen Ausdrücken) und des Vorzeichenminus (bei Beginn eines mathematischen Ausdrucks), werden unter Umständen ebenfalls mit komplettem Punktabzug bestraft. Tippt man nämlich statt $3 - x$ aus Versehen 3-$x$, so meldet der TI keinen Fehler, sondern rechnet $3 \cdot (-x)$, weil das Vorzeichen vor dem $x$ ein Vorzeichenminus ist.

Auch auf andere Krankheiten des TI muss im Unterricht eingegangen werden. Beispielsweise ist er nicht in der Lage, die Nullstelle von $y = x^2$ mit dem üblichen Befehl `zero` zu bestimmen, weil das Schaubild, wie der Rechner korrekt angibt, keinen Vorzeichenwechsel besitzt; dagegen findet er die Nullstelle von $y = (x-1)^2$ problemlos. Und wenn man den TI die Tangente an $f(x) = e^x$ in $x_0 = 1$ ausrechnen lässt, dann gibt er als Lösung

$$y = 2.7182822815 + -4.5304$$

an, was nicht ganz dem erwarteten

$$y = ex = 2.718281828x$$

entspricht: tatsächlich ist der berechnete $y$-Achsenabschnitt gleich $-4.53 \cdot 10^{-7}$, aber an die negative Potenz von 10 kommt man ohne sehr genaue Kenntnisse der Bedienungsanleitung nicht heran: ich habe die $10^{-7}$ dadurch bestimmt, dass ich stattdessen die Tangente in $x_0 = 1$ an das Schaubild der Funktion $f(x) = e^x - ex$ berechnen lassen habe – aber wer auf diese Idee kommt, braucht für die Tangente keinen GTR.

## 7. Die Abschaffung des Mathematikunterrichts

Hatten Didaktiker früher den Ausbau des Mathematikunterrichts im Blick, versuchen sie seit den 1990er Jahren, denselben abzuschaffen. Den großen Gong hat Werner Heymann in seiner Habilitationsschrift [62] mit der Frage gesetzt, ob sieben Jahre Mathematik nicht genug seien (sh. auch [71, 72] und eine ganze Reihe weiterer Didaktiker).

Inwzischen sind wir diesem Ziel schon sehr nahe. Mit dem Schreiben vom 15.10.2014 hat das Regierungspräsidium Stuttgart festgelgt, was die Abiturienten des Jahres 2019 alles nicht können müssen:

- Faktorisierung in schwierigen Fällen (Anwendung einer binomischen Formel "rückwärts", Polynomdivision)
- Lösen von schwierigen Gleichungen wie $2x^2 = 1,8x + 0,4$ ohne Taschenrechner;
- Betrachtung der Definitionsmenge einer Gleichung oder die Probe bei Wurzel- und Bruchgleichungen
- Optimierung von Wurzelfunktionen mit Mitteln der Differentialrechnung
- allgemeine Angabe aller Lösungen von trigonometrischen Gleichungen wie $\sin x = 1$
- Auflösen einer Ungleichung durch Äquivalenzumformung

Die angesprochenen “Wurzel- und Bruchgleichungen” beschränken sich dabei auf Gleichungen der Form $\sqrt{x^2+4} = 9$ und $x + 3x = \frac{4}{x}$.

Darüberhinaus müssen die Abiturienten natürlich auch die Dinge nicht können, die sie bereits vor Jahren nicht mehr können mussten (partielle Integration, Substitutionsregel), die sie derzeit nicht können müssen (Beweise durch vollständige Induktion, Beweise mit Vektoren, Quotientenregel) oder erst ab 2017 nicht mehr können müssen (Differentialgleichungen des exponentiellen und beschränkten Wachstums). Es verwundert daher nicht, dass in der Liste der Inhalte, die nicht mehr in allen Bundesländern lehrplanmäßig verankert sind (sh. Stephanie Schiemann [39]), das Land BW Spitzenreiter ist: dort fehlen

> *Teilbarkeitslehre, Exponentialgleichung, binomische Formeln, Polynomdivision, trigonometrische Funktionen außer Sinus und Cosinus, Sinus- und Cosinus-Satz, gebrochen-rationale Funktionen, Funktionsscharen, Newton-Verfahren, Median, Boxplots, Vektorprodukt, Normalenform,*

und wenn man die Normalverteilung, die ebenfalls nicht abiturrelevant ist, auch noch abzieht, dann stellt sich die Frage, was in diesem Bundesland überhaupt noch unterrichtet wird. Wer gemeint hat, ein solche Mängelliste würde irgendwo zu einem Aufschrei geführt haben, wird enttäuscht: es hat den Anschein, als wären alle Personen und Vereinigungen, die bildungstechnisch etwas zu sagen haben, mit diesem Zustand zufrieden.

Vergleicht man den Inhalt der Vektorgeometrie an heutigen Gymnasien mit dem des Grundkurses [11] in Baden-Württemberg aus den 90er Jahren, so stellt man fest, dass von den fünf Kapiteln des damaligen Grundkurs-Stoffs heute zwei weggefallen sind: Kreise und Kugeln, sowie die Ellipse als Kegelschnitt. Beim verbleibenden Rest der Vektorgeometrie wurde der abstrakte Kern entfernt: Begriffe wie Vektorraum, Linearkombination, lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension sind heute ebenso wenig noch Gegenstand des Unterrichts wie Teilverhältnisse, Beweise (z.B. der Existenz des Schwerpunkts eines Dreiecks) mit Vektoren, oder etwa der Zusammenhang zwischen Cosinussatz und Grundeigenschaften des Skalarprodukts, der heute nicht mehr vermittelbar ist, weil es den Cosinussatz gar nicht mehr gibt.

Auch ein Vergleich des Grundkurses Analysis [12] mit dem heutigen Buch fördert einen fundamentalen Unterschied zu Tage: [12] verfügt über einen Aufbau und eine Struktur. Begriffe werden definiert, Sätze werden formuliert (und, man wagt es kaum zu sagen, auch bewiesen), die Zahl $e$ wird nicht über eine Taste auf dem GTR eingeführt, sondern als Grenzwert der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$, und in zwei optionalen Kapiteln am Ende folgen gar die Integration durch Substitution und die Ableitung von Umkehrfunktionen. Der letzte Abschnitt über die geschichtliche Entwicklung wäre im heutigen Buch vollkommen fehl am Platze, da kein Schüler mehr die “Klärung der Grundlagen” der Infinitesimalrechnung als Problem erkennen könnte, weil diese Klärung der Grundlagen im heutigen Unterricht nicht mehr auftaucht.

Weil bei Gesprächen mit Mathematikern des öfteren der Verdacht geäußert wird, diese Lage hätte etwas mit der derzeitigen Landesregierung in Baden-Württemberg zu tun, so sei festgehalten, dass die Abschaffung des Mathematikunterrichts vor allem unter der Leitung der jetzigen Botschafterin im Vatikan, Frau Schavan, vorgenommen worden ist, und dass unter der jetzigen Landesregierung immerhin der GTR (ab 2019) abgeschafft wurde (was die DMV übrigens nicht begrüßt, sondern ganz zeitgemäß mit einem pro-contra-Artikel zur Kenntnis genommen hat) und ein

Vertiefungskurs eingeführt wurde, der den Nachteil, der baden-württembergischen MINT-Studenten aus der Abschaffung der Leistungskurse erwachsen ist, aber nicht ausgleichen kann.

## Die Rolle der Didaktik

Zum Thema empirische Didaktik (eine andere scheint es heute gar nicht mehr zu geben) ließe sich vieles sagen, auch wenn es schwer fällt, nüchtern zu bleiben. Ich halte von der Idee, mit Hilfe eines Tests am Ende einer Unterrichtseinheit könne man die Qualität des Unterrichts oder der verwendeten Methoden messen, gar nichts. Der Nachweis, dass Tests die Aussagekraft haben, welche die empirische Didaktik ihnen zuschreibt, muss die Didaktik führen. Solange dies ausbleibt, hat die Didaktik nicht mehr Anspruch auf Wissenschaftlichkeit als Astrologie oder die Erforschung außersinnlicher Wahrnehmung.

Die Unwissenschaftlichkeit der modernen Bildungsforschung ist nicht nur mir aufgefallen. Nach einer Debatte in der französischen Akademie der Wissenschaften, in der es um die Bildung ging, begann Laurent Lafforgue, sich für das Bildungswesen in Frankreich zu interessieren. Zusammen mit anderen Wissenschaftlern (darunter Jean-Pièrre Serre) hat er in [21] beschrieben, wie Wissenschaft (wieder) unterrichtet werden sollte. Daraufhin wurde er von Jacques Chirac gebeten, Mitglied im Haut Conseil de l'Éducation zu werden.

In seiner email an den Präsidenten des HCE schrieb Lafforgue in Bezug auf den Vorschlag, die "nationalen Bildungsexperten" heranzuziehen, um den derzeitigen Unterricht zu evaluieren:

> *Pour moi, c'est exactement comme si nous étions un "Haut Conseil des Droits de l'Homme" et si nous envisagions de faire appel aux Khmers rouges pour constituer un groupe d'experts pour la promotion des Droits Humains.*
>
> *Für mich ist das so, als wären wir die "Oberkommission der Menschenrechte" und würden die Roten Khmer einladen, eine Gruppe von Experten für die Förderung der Menschenrechte zu bilden.*

Nach dieser email wurde er 10 Tage nach seiner Aufnahme in das neu gebildete HCE zum Rücktritt aus diesem Kommittee aufgefordert. Seine Meinung ist dieselbe geblieben:

> *Car plus je me documentais, plus je découvrais avec douleur qu'en quelques années, l'école que j'ai connue et qui m'a presque tout donné avait complètement disparu: les responsables d'un tel désastre, ce sont précisément les experts de l'Éducation nationale.*
>
> *Aber je mehr ich recherchierte, desto mehr habe ich schmerzhaft entdeckt, dass innerhalb weniger Jahre die Schule, wie ich sie kannte und die mir fast alles gegeben hat, verschwunden ist: die für diese Katastrophe Verantwortlichen sind genau die Experten der Nationalen Bildung.*

In [30, S. 191] wird er noch deutlicher:

> *Les "sciences de l'éducation", qui ont dominé l'école depuis quelques décennies et l'ont transformée pour son malheur, sont une pure charlatanerie et ne méritent pas d'être appelées sciences.*

> *Die "Erziehungswissenschaften", welche die Schule seit einigen Jahrzehnten dominieren und diese verschlechtert haben, sind reine Scharlatanerie und verdienen nicht, Wissenschaften genannt zu werden.*

Auch Daniel Perrin wendet sich (bisher vergeblich) auf seiner Homepage und in [35, 36] gegen das, was er "Geozid" nennt: die endgültige Abschaffung der Geometrie im Schulunterricht, weil diese nicht "anwendbar" sei oder, noch schlimmer: weil Frankreich schlecht in PISA ist und Geometrie in diesen Tests nicht vorkommt.

Zum Schluss möchte ich den Lesern ein besonders hübsches Kleinod der empirischen Didaktik mit auf den Weg geben: Diana Henz, Wolfgang Schöllhorn und Reinhard Oldenburg untersuchen in [60] die Frage *Bessere Mathematikleistung durch bewegtes Sitzen?* und kommen zum Schluss:

> *Es finden Ablenkungsprozesse durch sensorische Erfahrungen des dynamischen Sitzens statt, die einer dysfunktionalen Überfokussierung auf die Aufgaben entgegenwirken und somit eine optimale Aufmerksamkeitslenkung bei bereits automatisierten Aufgabenabläufen fördern, im günstigsten Fall sogar ein Flowerleben ermöglichen.*

Es ist erstaunlich, wie leicht man mit einem Fremdwörterlexikon einen einfachen Satz wie "Bewegtes Sitzen lenkt die Schüler ab" in einen "Beitrag zum Mathematikunterricht" verwandeln kann.

## Was ist zu tun?

Ich glaube nicht, dass die heutige Didaktik reformierbar ist: der Niveauverlust auf diesem Gebiet ist endgültig. Es wird Sache der Fachbereiche Mathematik sein, Lehrstühle für Fachdidaktik einzurichten und die Lehrerausbildung an die mathematischen Institute zurückzuholen, was schwer genug ist, hat man sie doch im wesentlichen aus Desinteresse an der Ausbildung von Lehrern verloren.

Ich habe auch den Glauben daran verloren, dass die Schule reformierbar ist: auch hier ist der Niveauverlust endgültig. In vielen Beiträgen, die auf seiner Homepage zu finden sind, fordert Lafforgue denn auch nicht die Reform des Bildungswesens, sondern deren Neugründung. Vor diesem Hintergrund verliert die Ankündigung der Linken, bei einem Wahlerfolg in der nächsten Landtagswahl in Baden-Württemberg das Gymnasium endgültig abzuschaffen, seinen Schrecken: de facto handelt es sich bei diesem Plan ohnehin nicht um einen Totschlag, sondern nur noch um das Begräbnis, und wenn das Gymnasium erst einmal unter der Erde ist, besteht vielleicht Hoffnung auf eine neue Oberschule – die allerdings nur dann sinnvoll ist, wenn die Universität wieder zur Universität wird. Oder wird man diese auch neu gründen müssen?

## Literatur

[1] R.P. Feynman, *Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman!*, Piper 1991

[2] F. Lemmermeyer, *Mathematik à la Carte. Elementargeometrie an Quadratwurzeln mit einigen geschichtlichen Bemerkungen*, Spektrum 2014

[3] F. Lemmermeyer, *Mathematik à la Carte. Quadratische Gleichungen mit Schnitten von Kegeln*, in Vorbereitung

Schulbücher

[4] M. Baierlein, F. Barth, U. Greifenecker, G. Krumbacher, *Anschauliche Analysis*, Ehrenwirth 1997
[5] F. Barth, G. Krumbacher, E. Matschiner, K. Ossiander, *Anschauliche Geometrie*, Ehrenwirth 1986–1989
[6] J. Cukrowicz, J. Theilenberg, B. Zimmermann, *MatheNetz 10*, Braunschweig 2010
[7] F.W. Dustmann, *Abakus. Angewandte Mathematik. Materialien für den Unterricht im Differenzierungsbereich*, Schöningh 1995
[8] Heye-Lietzmann, *Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen*, Band $3^A$, Teubner 1940
[9] *Lambacher Schweizer 11*, 1. Aufl. 2006
[10] *Lambacher Schweizer. Analysis*, Klett Verlag 1968
[11] *Lambacher Schweizer. Analytische Geometrie. Grundkurs*, Klett 1999
[12] *Lambacher Schweizer. Analysis Zwei. Grundkurs*, Klett 1999
[13] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **3**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2005
[14] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **4**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2006
[15] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **5**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2007
[16] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien* **6**, Klett Stuttgart, 1. Aufl. 2008
[17] *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe*, Klett Verlag, 1. Aufl. 2009
[18] *Lambacher Schweizer. Mathematik. Analysis Leistungskurs*, 1. Aufl. 2012
[19] Neue Wege **5** (Baden-Württemberg), Schrödel 2009

## Bildungsmisere

[20] M. Artigue (moderator), E. de Shalit, A. Ralston (panelists), *Controversial issues in K-12 mathematical education*, Proceedings of the ICM 2006 Madrid, 1645–1661
[21] R. Balian, J.-M. Bismut, A. Connes, J.-P. Demailly, L. Lafforgue, P. Lelong, J.-P. Serre, *Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique. Comment les réenseigner*, Les Cahiers du débat, Nov. 2004
[22] D. Grillmayer, *Die Neue Mathematik*, Jahresbericht des Bundesrealgymnasiums Steyr, 1975/76
[23] R.H. Kaenders, *Von Wiskunde und Windmühlen: Über den Mathematikunterricht in den Niederlanden*, Beiträge zum Mathematikunterricht 2009,
[24] H.P. Klein, *Die neue Kompetenzorientierung: Exzellenz oder Nivellierung?*, ZfdB **1** (2010), 15–26; `http://bildung-wissen.eu`
[25] M. Kline, *Why Johnny can't add. The Failure of the New Math*, New York 1973; dtsch. Übers. *Warum kann Hänschen nicht rechnen? Das Versagen der Neuen Mathematik*, Beltz 1974
[26] J. Krautz, *Sich bilden oder funktionieren – in welcher Richtung sind wir unterwegs?*, Transkript des Vortrags am 18.10.2013 anlässlich der 9. Pädagogischen Fachtagung zum Thema "Moderne Pädagogik im Spannungsfeld zwischen Individualisierung und Ökonomisierung", `http://www.interessen-noefamilien.at/lofi/sites/default/files/DrKrautzVortrag18102013.pdf`
[27] W. Kühnel, *Modellierungskompetenz und Problemlösekompetenz im Hamburger Zentralabitur zur Mathematik*, Math. Semesterber. **62** 2015, 69–82
[28] L. Lafforgue, *Courriel*, `http://www.ihes.fr/~lafforgue/demission.html`
[29] L .Lafforgue, *L'Education nationale est devenue un vaste mensonge*, `http://www.en-aparte.com/2013/06/28/laurent-lafforgue-mathematicien-leducation-nationale-est-devenue-un-vaste-mensonge/`
[30] L. Lafforgue, L. Lurçat (Hrsg.), *La débacle de l'école: une tragédie incomprise*, Guibert 2007
[31] K. Landsman, *Where have all the students gone?*, Nieuw Archive for Wiskunde **5** (2008), 138–140
[32] K.P. Liessmann, *Theorie der Unbildung, Die Irrtümer der Wissensgesellschaft*, Piper 2006
[33] K.P. Liessmann, *Geisterstunde: Die Praxis der Unbildung. Eine Streitschrift*, Zsolnay Verlag
[34] G. Malaty, *The third world mathematics education is a hope for the world mathematics education development in the 21st century*, `http://math.unipa.it/~ grim/EMALATY231-240.PDF`
[35] D. Perrin, *Mathématiques d'école: Nombres, mesures et géométrie*, 978-2842251581
[36] D. Perrin, *La géométrie, pourquoi et comment?*, `http ://www.math.u-psud.fr/~perrin/`

[37] C.M. Ringel, *Sind sieben Jahre Mathematik genug? Anmerkungen zur Habilitationsschrift "Allgemeinbildung und Mathematik" von H.W. Heymann*, 17.10.1995
[38] C.M. Ringel, *Fortsetzung des Schmerzgeschreis eines Mathematikers. Weitere Anmerkungen zur Arbeit "Allgemeinbildung und Mathematik" von H.W. Heymann*,
[39] S. Schiemann, *Mathe = Mathe? Mathematik in 16 Bundesländern*, Mitt. DMV (2013), 226–232
[40] H. Schwetlick, *Angewandte Mathematik heute: vom mathematischen Modell zum Computerprogramm*, 4. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik, 23.02. 1999
[41] Ch. Pfeiffer, Th. Mößle, M. Kleimann, F. Rehbein, *Die PISA-Verlierer – Opfer ihres Medienkonsums*, Kriminologisches Forschungsinstitut Niedersachsen, 2007
[42] Th. Sonar, *Der langsame Tod der Analysis. Eine Begräbnisrede*, MI 57
[43] M. Tauschke, R. Tauschke, *Lehrplan 21 – Bildungsabbau im Fach Mathematik*, `http://www.zeit-fragen.ch/index.php?id=1661`
[44] J. van de Craats, *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen*, Nieuw Archief voor Wiskunde 5/8 (2) (2007), 132–136
[45] McWalker, www.parliament.uk
[46] Ch. Türcke, *Kompetenzwahn*, `http://bildung-wissen.eu/fachbeitraege/kompetenzwahn.html`
[47] E.Ch. Wittmann, *Realistic Mathematics Education, past and present*, Nieuw Archief voor Wiskunde, (5) **6** (2005)
[48] E.Ch. Wittmann, *Mathe 2000+*, `http://www.mathe2000.de/Download`
[49] J. Wuttke, *PISA: Nachträge zu einer nicht geführten Debatte*, GDM-Mitteilungen **87** (2009), 22–30

## Didaktisches Gruselkabinett

[50] M. Auer, R. Sandmann, Th. Sautter, U. Wagner, S Zander, M Zinser, *NIMBUS. Notenverteilung Im Mathematikabitur – Bestandsaufnahme Und Strategien. Abschlussbericht*, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung, Rottweil, 2008
[51] A. Baeger, R. Lenz, *Wo fliegen se denn? Rettungshubschrauber in Rheinland-Pfalz*, Sinus-Transfer, Rheinland-Pfalz 2004, S. 125ff
[52] B. Barzel, *Expertise zum Einsatz von Computeralgebra-Systemen (CAS) im Mathematikunterricht in Thüringen*,
[53] W. Blum, *Mathematical modelling in mathematics education and instruction*, In: *Teaching and learning mathematics in context* (1993), 3–14
[54] R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe*, Springer Spektrum 2013
[55] M. Buchtele, *Hurra, Hurra, die Feuerwehr ist da oder: Schulgeometrie ausnahmsweise realitätsnah*, Vortrag auf der Future Research in Combinatorial Optimization (FRICO) am 12. und 13.09.20003 in Klagenfurt, Österreich
[56] R.W. Case, *The Dutch revolution in secondary school mathematics*, Mathematics Teacher **98** (2005), 374–384
[57] A. Eberl, *Standortplanung in logistischen Netzwerken*, Präsentation, `http://www.uni-regensburg.de/mathematik/didaktik-mathematik/ medien/ lehre-ws-12-13/eberl/`
[58] M. Epkenhans, *Computeralgebrasysteme im Zentralabitur NRW – Analyse einer Musteraufgabe*, in [63], 13–16
[59] J. Erpenbeck, *Kompetenzorientierung ist die Rückkehr zum Humboldtschen Bildungsideal*, nexus newsletter 3 (2013)
[60] D. Henz, W. Schöllhorn, R, Oldenburg, *Bessere Mathematikleistung durch bewegtes Sitzen?*, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, Band 1
[61] W. Herget, G. Kaiser, *Reichen sieben Schuljahre Mathematik?* mathematik lehren **74** (1996), 64–66
[62] H.W. Heymann, *Allgemeinbildung und Mathematik*, Habilitationsschrift Bielefeld 1995
[63] U. Kortenkamp, A. Lambert, A. Zeimetz (Hrsg.), *Computerwerkzeuge und Prüfungen. Aufgaben mit Technologieeinsatz im Mathematikunterricht*, Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V., Tagungsbericht 2006, 2007 Soest

[64] G. Krauthausen, *Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwerts der vier Rechenmethoden*, Journal für Mathematikdidaktik **14** (1993)

[65] M. Leppig, *Die formale Theorie des differenzierenden Gruppenunterrichts in mengentheoretischer Beschreibung*, Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, Vorträge auf der 2. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Ludwigsburg, 226–237

[66] H. Meißner, *Projekt TIM 5/12 – Taschenrechner im Mathematikunterricht für 5- bis 12-Jährige*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **10**, Heft 4 (1978), 221–229

[67] H. Meißner, *Taschenrechner im Mathematikunterricht der Grundschule*, mathematica didactica **29** (2006), 5–25

[68] S. Müller-Philipp, *Taschenrechner in der Grundschule?*, Vortrag Januar 2013

[69] F. Nestle, *Mathematik – Pflichtfach nur bis Klasse 7?*, Beiträge zum Mathematikunterricht, 1995

[70] F. Nestle, *World of Warcraft und Mathematik. Lernen in Vergangenheit und Zukunft*, 43. Jahrestagung der GDM in Oldenburg, 2. bis 6. März 2009

[71] L. Profke, *Brauchen wir einen Mathematikunterricht?*, Mathematik in der Schule **33** (1995), 129–136

[72] L. Profke, *Reichen sieben Schuljahre Mathematik? Einige vernachlässigte Gesichtspunkte*, Praxis der Mathematik **38** (1996), 227–230

[73] A. Ralston, *Let's Abolish Pencil-and-Paper Arithmetic*, J. Computers in Mathematics and Science Teaching **18** (1999), 173–194; `http://www.doc.ic.ac.uk/ ar9/abolpub.htm`

[74] *Historie von $T^3$*, `http://www.t3deutschland.de/index.php?id=37`

[75] M. van den Heuvel-Panhuizen, *Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way!*, Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.

[76] H.-J. Vollrath, *Zur Entwicklung von Forschungsparadigmata in der Mathematikdidaktik*, in H.-G. Steiner, H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze*, Schriftenreihe des IDM 20, Köln (Aulis) 1995, 161–166

[77] H.-G. Weigand, *Der bayerische Modellversuch $M^3$. Taschencomputer im Mathematikunterricht: notwendig, hilfreich oder überflüssig?* `ttp://www.ma-weigand.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/weigand/`

[78] H.-G. Weigand, *Didaktische Prinzipien*, `http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/`

[79] J. Weitendorf, *Ein Jahr mit einem CAS in Kl. 11*, in *Mathematik und Computer – Bestandsaufnahme und Ausblick*, Tagungsbericht 24./25. Sept. 2004